Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y^2-2x^2 \cdot y+x^2-y^2+2y-1}{(x-1)(y-1)} & , (x,y)\neq(1,1) \\ a\in\mathbb{R} & , (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

i) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$ να βρεθεί η τιμή του $a\in\mathbb{R}$

ii) ΝΔΟ η f συνεχώς παραγωγίσιμη στον $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,1)\}$ και έπειτα να εξεταστεί αν η f είναι μερικώς διαφορίσιμη στο $(1,1)$

iii) Να εξεταστεί αν η f διαφορίσιμη στο $(1,1)$

iv) Να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο.

ΛΥΣΗ

i) f συνεχής στον $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ συνεχής στο $(1,1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)=f(1,1)=a\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2 \cdot y^2-2x^2 \cdot y+x^2-y^2+2y-1}{(x-1)(y-1)}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2(y^2-2y+1)-(y^2-2y+1)}{(x-1)(y-1)}=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x^2-1)(y-1)^2}{(x-1)(y-1)}=a \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(1,1)} (x+1)\cdot(y-1)=a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=0}$$

ii)

$$f(x,y)=\begin{cases} (x+1)(y-1) & , (x,y)\neq(1,1) \\ 0 & , (x,y)=(1,1) \end{cases}$$

δηλ. $f(x,y)=(x+1)(y-1)$, $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\Big((x+1)\cdot(y-1)\Big) = y-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x+1)\cdot(y-1) = x+1$$

όπου, $(\exists)\left[\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right.$ και $\left.\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\right]$ συνεχείς

άρα f συνεχώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$, άρα η f θα 'ναι και διαφορίσιμη (ολικά) στο $\mathbb{R}^2$ διότι ορίζεται πλέον σε όλο τον χώρο $\mathbb{R}^2$ συνεπώς και έτσι η f και μερικώς διαφορίσιμη στον $\mathbb{R}^2 \Rightarrow f$ μερικώς διαφορίσιμη στο $(1,1)$

iii) Προφανώς από (ii) f διαφορίσιμη στο $(1,1)$

iv) $f(1,1) = 0$

Εφαπτόμενο επίπεδο

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) =$$
$$= f(1,1) + \nabla f(1,1)(x-1, y-1) \quad (*)$$

$$\left[\nabla f(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,1) - f(1,1)}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \left(= \lim_{h\to 0}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y}\right)\right]$$

προφανές αφού μερικώς διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ άρα μερικώς διαφορίσιμη και στο $(1,1)$

$(*) \to z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) =$
$= f(1,1) + \nabla f(1,1)(x-1, y-1) = 0 + (1-1)(y-1) + (1+1)(x-1) = 2x-2$

Να υπολογιστεί το εφαπτόμενο επίπεδο του γραφήματος

$$z = x^2 + y^4 + e^{x \cdot y} \quad \text{στο σημείο } (1,0,2)$$

ΛΥΣΗ

όπως δουλεύουμε στις συναρτήσεις στον $\mathbb{R}$

έτσι και εδώ πέρα έχουμε:

1ον) Να βρούμε τις μερικές παραγώγους στο σημείο $(1,0,2)$

2ον) Την τιμή της $f(x,y) = x^2 + y^4 + e^{x \cdot y}$ στο $(1,0,2)$

3ον) Να γράψουμε και να αντικαταστήσουμε στον τύπο του εφαπτομένου επιπέδου.

1ον)
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y e^{x \cdot y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2$$

και

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + x \cdot e^{x \cdot y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

2ον)
$$f(1,0) = 1 + e^0 = 2$$

3ον) Στον $\mathbb{R}$ εξ. εφαπτομένης ξέρουμε την εξής

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Στον $\mathbb{R}^4$ έχουμε την αντιστοιχία:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)(x-x_0) + \nabla f(x_0,y_0)(y-y_0) \Leftrightarrow$$

$$z - f(1,0) = \nabla f(1,0)(x-1) + \nabla f(1,0)(y-0) \Leftrightarrow$$

$$z - 2 = 2(x-1) + 1 \cdot y \Leftrightarrow$$

$$\boxed{z = 2x + y} \leftarrow \text{εφαπτόμενο επίπεδο}$$